



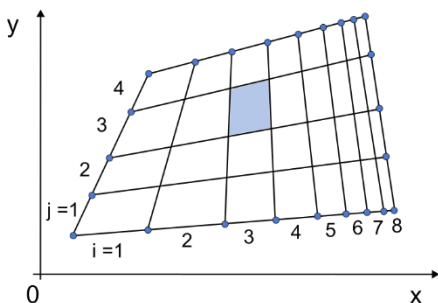
Posouzení kvality výpočetní sítě, klasifikace chyb při numerické simulaci a typy okrajových podmínek

Obsah přednášky

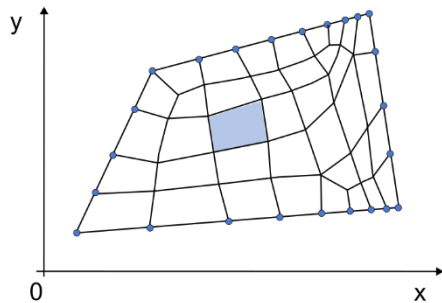
- Typy výpočetních sítí (struktura, hustota, kvalita)
- Závislost konečného řešení na hustotě sítě
- Druhy chyb při numerické simulaci
- Typy nejčastěji používaných okrajových podmínek (OP)

Typy výpočetních sítí

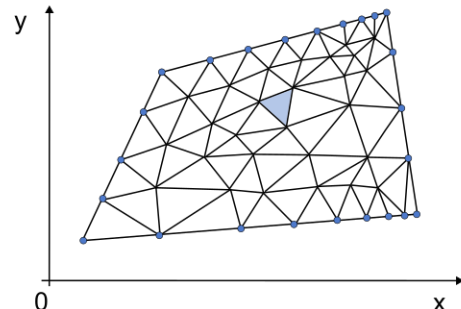
- Většina CFD programů využívá jak **strukturované** tak **nestrukturované** sítě.



a) Strukturovaná
čtyřúhelníková 2D síť
(32 buněk)



b) Nestrukturovaná
čtyřúhelníková 2D síť
(38 buněk)



c) Nestrukturovaná
trojúhelníková 2D síť
(76 buněk)

Typy výpočetních sítí (2)

- Existuje celá řada metodik tvorby sítě.
- Strukturované sítě jsou tvořeny elementy o 4 hranách (2D) nebo 6 stěnách (3D).
- Každý element/objem je jednoznačně určen pomocí indexů (i, j, k) .
- Můžeme číslovat intervaly, jednotlivé objemy nebo uzly (není zde znázorněno).

Typy výpočetních sítí (3)

- Nestrukturované sítě jsou obecně tvořeny elementy libovolných tvarů, ale nejčastěji trojúhelníky a čtyřúhelníky (2D) nebo čtyřstěny a šestistěny (3D).
- U nestrukturovaných sítí nelze jednoznačně identifikovat jednotlivé elementy pomocí indexů (i, j, k).
- Místo toho jsou objemy číslovány jiným způsobem a tyto informace musí být uloženy v paměti.

Typy výpočetních sítí (3)

- Používáme elementy různých tvarů: šestistěny, čtyřstěny, hranoly, pyramidy, ...

2D



čtýřúhelník



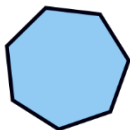
trojúhelník



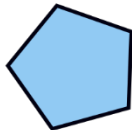
lichoběžník



kosodélník

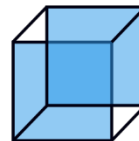


sedmiúhleník
(heptagon)

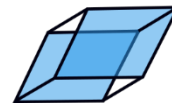


pětiúhelník
(pentagon)

3D



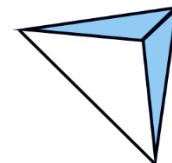
šestistěn
(hranol)



šestistěn
(zkosený)



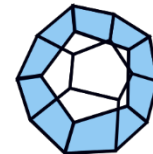
pětistěn
(pyramida)



čtyřstěn



pětistěn
(hranol)



mnohostěn
(polyhedron)

Typy výpočetních sítí (4)

- Většinou platí, že pro dosažení srovnatelné přesnosti výsledků je v případě strukturované sítě potřeba méně elementů.
- Pro komplikované geometrie jsou využívány přednosti nestruturovaných sítí.
- **Bez ohledu na typ použité sítě** je pro dosažení spolehlivých a smysluplných výsledků **důležitá kvalita sítě**, tj. kvalita jednotlivých elementů.

Typy výpočetních sítí (5)

- Elementy nesmí být příliš moc šikmé nebo zdeformované, jinak mohou nastat problémy při výpočtu (konvergence), což může vést k nepřesnostem v konečném řešení.
- **Důležitá je i globální kvalita sítě**, tj. snažíme se vyhnout náhlým změnám ve velikosti jednotlivých elementů, síť by tedy měla být tvořena pozvolnými přechody mezi elementy a co nejvíc pravidelná (nepřesnosti, stabilita).
- Elementy nesmí v síti chybět ani se nesmí překrývat (existují výjimky).

Kvalita výpočetní sítě

- Kvalita sítě má **významný vliv na přesnost a stabilitu** numerické simulace.
- Pro posouzení kvality sítě existuje mnoho různých metrik (parametrů), často vývojáři kódu volí své vlastní definice a parametry jsou pak mezi různými programy kvantitativně neporovnatelné.
- Proto by měl se měl uživatel o definici daného parametru vždy ujistit v manuálu daného SW.

Kvalita výpočetní sítě (2)

- Nejčastěji používané parametry jsou **ŠIKMOST** „Equivalent Skewness“ (ES), **ORTOGONÁLNÍ KVALITA** „Orthogonal Quality“ (OQ) a **ŠTÍHLOSTNÍ POMĚR** „Aspect Ratio“ (AR).
- Vždy je nutné kontrolovat kvalitu sítě před samotným výpočtem!
- **Za žádnou cenu nesmí mít ani jeden element záporný objem!!!**

Šikmost („Equiangle Skewness“)

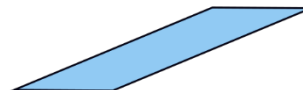
Nulová šikmost

Vysoká šikmost

Čtyřúhelník



$$\theta_{eq} = 90^\circ$$



Trojúhelník



$$\theta_{eq} = 60^\circ$$



- „Equiangle Skewness“ (ES):

$$ES = \text{MAX} \left(\frac{\Theta_{\max} - \theta_{eq}}{180^\circ - \theta_{eq}}, \frac{\theta_{eq} - \Theta_{\min}}{\theta_{eq}} \right) \quad (1)$$

- Θ_{\min} a Θ_{\max} jsou minimální a maximální úhel ve st. mezi libovolnými dvěma hranami ($0 \leq ES \leq 1$), kde **0 (0% zkosení)** je **nejlepší** a **1 (100% zkosení)** je **nejhorší**.

Šikmost („Equiangle Skewness“) (2)

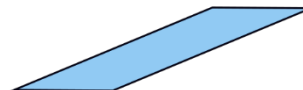
Nulová šikmost

Vysoká šikmost

Čtýřúhelník



$$\theta_{eq} = 90^\circ$$



Trojúhelník



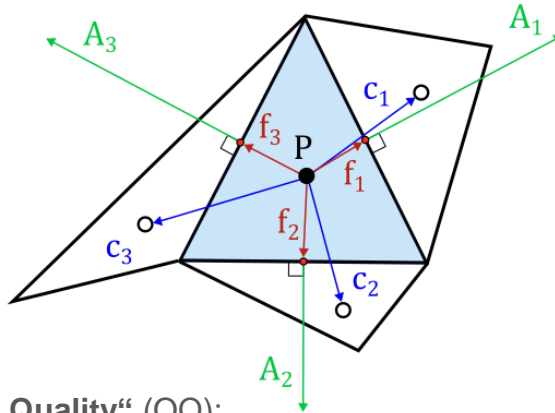
$$\theta_{eq} = 60^\circ$$



- **Maximální šikmost** pro síť tvořenou trojúhelníky/čtýřstěny by měla být **nižší než 0,9**.
- Θ_{eq} je úhel ve stupních mezi libovolnými dvěma hranami ideálního elementu se stejným počtem hran, pro N-hranný mnohoúhelník platí:

$$\theta_{eq} = \frac{180^\circ(N-2)}{N} \quad (2)$$

Ortogonalní kvalita („Orthogonal Quality“)

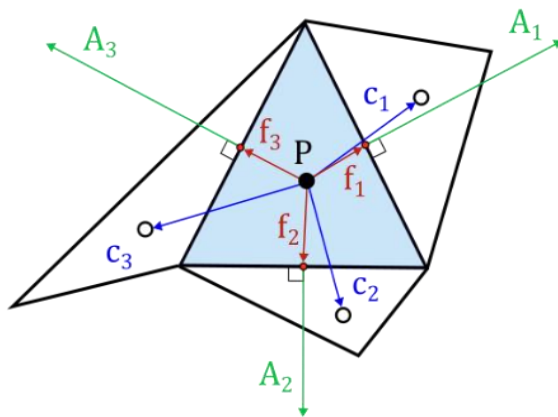


- „Orthogonal Quality“ (OQ):

$$OQ = \text{MIN} \left(\frac{\vec{A}_i \cdot \vec{f}_i}{|\vec{A}_i| |\vec{f}_i|}, \frac{\vec{A}_i \cdot \vec{c}_i}{|\vec{A}_i| |\vec{c}_i|} \right)$$

- \vec{A}_i je vektor vnější normály plochy.
- \vec{f}_i je vektor ze středu objemu do středu jeho hraniční plochy.
- \vec{c}_i je vektor ze středu objemu do středu sousedního objemu.

Ortogonalní kvalita („Orthogonal Quality“) (2)



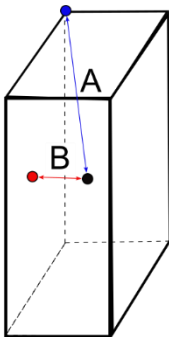
- $0 \leq OQ \leq 1$, kde **0 (0% ortogonalita)** je nejhorší a **1 (100% ortogonalita)** je nejlepší.
- Minimální OQ pro jakýkoliv typ elementu by neměla být menší než 0,01 (1%), přičemž průměrné hodnoty by měly být podstatně vyšší ($0,2 < OQ$).

Protažení nebo štíhlostní poměr („Aspect Ratio“)

- „Aspect Ratio“ (AR):

$$AR = \frac{\text{Nejdelší rozměr}}{\text{Nejkratší rozměr}} = \frac{A}{B}$$

- AR je počítán jako poměr maximální a minimální hodnoty následujících vzdáleností: vzdálenosti mezi středem objemu a středy ohraničujících ploch, vzdálenosti mezi středem objemu a uzly tvořícími tento objem.
- 1 nebo $1.41 \leq AR < \infty$, kde **1 (1.41)** je **nejlepší** a ∞ je **nejhorší**.



Malé protažení

Velké protažení

Čtýřúhelník



Trojúhelník

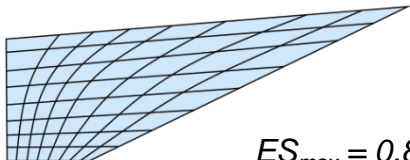


Kvalita sítě – Tipy a doporučení

- Příliš protažené objemy (vysoké AR) mohou způsobit při výpočtu problémy.
- Počet výpočetních objemů lze často minimalizovat použitím strukturované sítě.
- Nicméně strukturovaná síť nemusí být vždy nejlepší volbou, tvar a geometrie výpočetní oblasti v tom hrají velkou roli.
- Vysoce kvalitní nestrukturovaná síť je vždy lepší než nekvalitní strukturovaná síť!

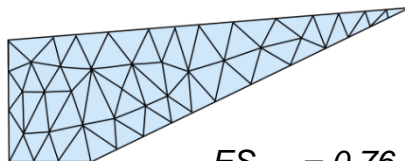
Kvalita sítě – Typy a doporučení (2)

Strukturovaná čtyřúhelníková síť
(64 objemů)



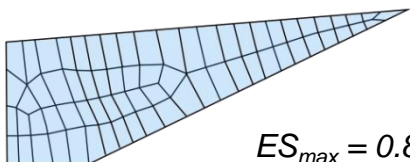
$$ES_{max} = 0.83$$

Nestrukturovaná trojúhelníková síť
(70 objemů)



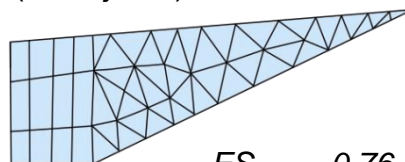
$$ES_{max} = 0.76$$

Nestrukturovaná čtyřúhelníková síť
(67 objemů)



$$ES_{max} = 0.87$$

Hybridní síť
(62 objemů)



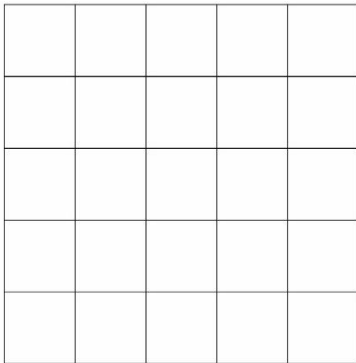
$$ES_{max} = 0.76$$

Hustota sítě

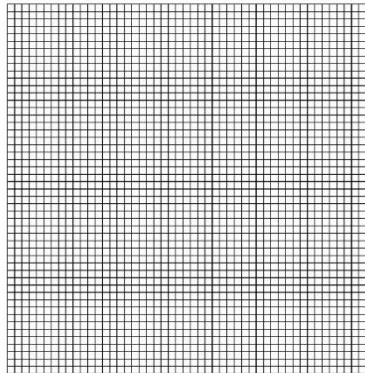
- Protože je reálná výpočetní oblast vždy diskrétní, je pro zachycení důležitých jevů, které při proudění vznikají, **velmi důležitá míra rozlišení, tj. hustota a rozložení jednotlivých konečných objemů v kritických oblastech výpočetního modelu.**
- Mezi takové jevy spadají smykové vrstvy, oblasti odtržení a zavíření, rázové vlny, mezní vrstvy, směšovací oblasti,
- Špatné rozlišení v kritických oblastech může negativně ovlivnit konečné výsledky!
- **Rozlišení v blízkosti pevné stěny (mezní vrstva)** hraje významnou roli v přesnosti vypočtených tečných napětí na stěně a součiniteli přestupu tepla u stěny.

Hustota sítě (2)

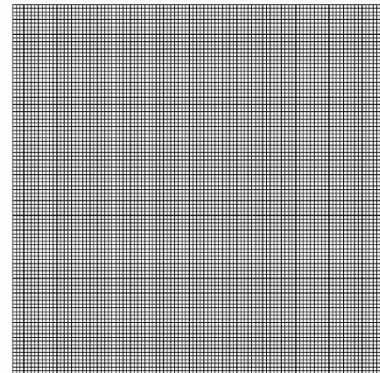
- Rozlišení proudění (1 objem = 1 hodnota tlaku, rychlosti, teploty, ...).
- Přesnost vs falešná (umělá nebo také numerická) difúze.
- Vliv hustoty sítě na konečné řešení (porovnat výsledky nejméně 3 rozdílných hustot).



a) **Hrubá síť**
(5x5), 25 objemů



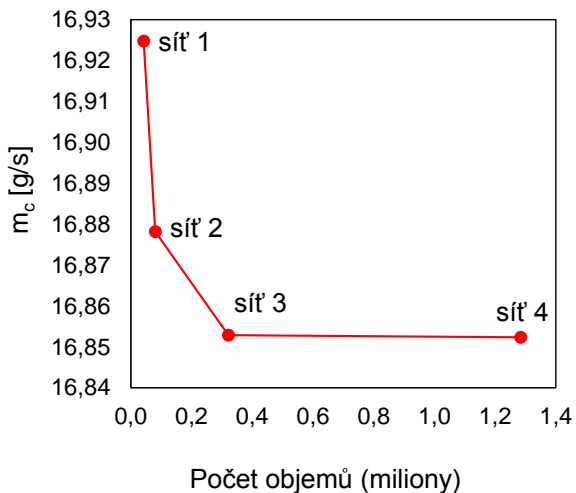
b) **Střední síť**
(50x50), 2.500 objemů



c) **Jemná síť**
(100x100), 10.000 objemů

Závislost konečného řešení na hustotě sítě

- **Vliv hustoty sítě na konečné řešení by měl být vždy ověřen!**
- Vždy se snažíme o nalezení kompromisu mezi přesností a výpočetní náročností.
- Test citlivosti sítě na konečné řešení je **úzce spojen s diskretizační chybou.**



Síť 1 – cca 40.000 objemů “Hrubá”

Síť 2 – cca 80.000 objemů “Střední”

Síť 3 – cca 320.000 objemů “Jemná”

Síť 4 – cca 1.200.000 objemů “Velmi jemná”

Chyby při CFD výpočtu

- Výsledky CFD výpočtu se budou vždy do jisté míry odlišovat od skutečných hodnot.
- Velikost tohoto rozdílu vyjadřuje **chyba při CFD výpočtu**.
- Výsledná (celková) chyba výpočtu bude vždy kombinací dále uvedených chyb.

Základní klasifikace chyb při CFD:

- Fyzikální model
- Geometrický model
- Diskretizace oblasti
- Diskretizace rovnic
- Zaokrouhlování (PC nula)
- Iterace (konvergence)

Soustavné (nelze je zcela eliminovat)

- PC programování
- Použití (nepozornost, znalosti)

Hrubé

Chyby při CFD výpočtu (2)

- Výsledky CFD výpočtu se budou vždy do jisté míry odlišovat od skutečných hodnot.
- Velikost tohoto rozdílu vyjadřuje **chyba při CFD výpočtu**.
- Výsledná (celková) chyba výpočtu bude vždy kombinací dále uvedených chyb.

Základní klasifikace chyb při CFD:

- Fyzikální model
- Geometrický model
- Diskretizace oblasti**
- Diskretizace rovnic**
- Zaokrouhlování (PC nula)**
- Iterace (konvergence)

Soustavné

- PCP (přesnost)
- P (přesnost) (přesnost)

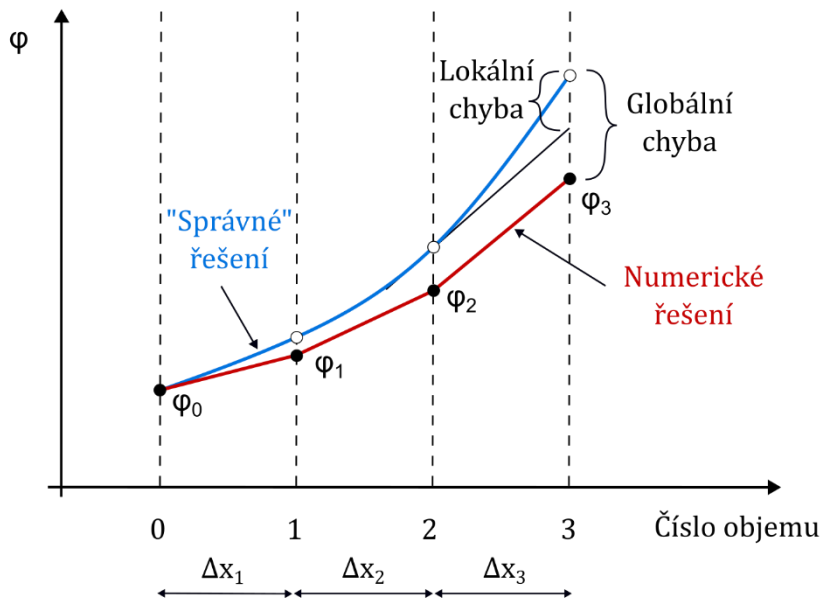
Hrubé

Diskretizační chyba

- Diskretizační chyba může být důsledkem diskretizace oblasti, rovnic, nebo časové domény. Často se tím myslí jen diskretizace oblasti.

Diskretizační chyba:

- Lokální chyba
- Globální chyba



Zaokrouhlovací chyba

- Pokud bychom měli ideální PC, který by mohl uchovat libovolný počet čísel na nekonečný počet číslic (desetinných míst), byla by tato chyba rovna nule.
- V takovém případě bychom při zanedbání ostatních druhů chyb dostali numerické řešení, které by bylo shodné s přesným řešením.
- Výsledná chyba **záleží na pořadí provedení jednotlivých matematických operací!**

Zaokrouhlovací chyba:

- Jednoduchá přesnost („Single Precision“)
- Dvojnásobná přesnost („Double Precision“)

Zaokrouhlovací chyba (2)

Počítač s jednoduchou přesností využívající celkem 7 číslic

Dáno: $a = 1013251$

$$b = 1013250$$

$$c = 0.5282817$$

Najít: $D = a - b + c$

$$E = a + c - b$$

Řešení:

$$D = 1013251 - 1013250 +$$

$$+ 0.5282817$$

$$= 1.000000 + 0.5282817$$

$$= \boxed{1.528281} \text{ (správné)}$$

$$E = 1013251 + 0.5282817 +$$

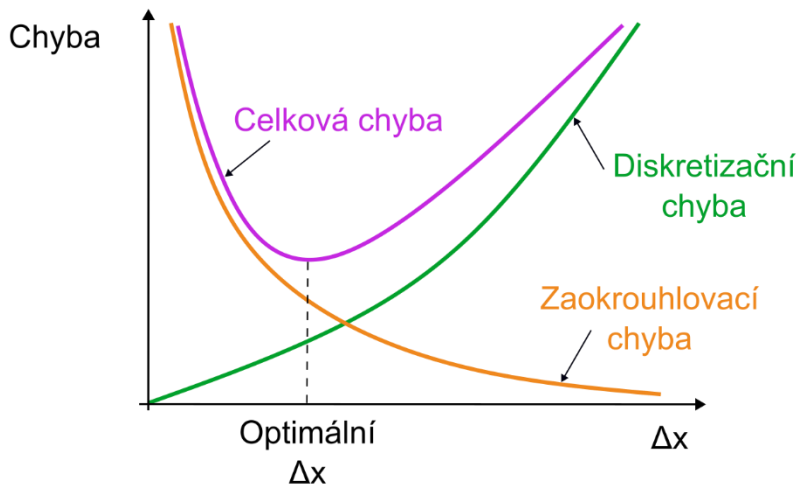
$$- 1013250$$

$$= 1013251 - 1013250$$

$$= \boxed{1.000000} \text{ (odchylka 34.6%)}$$

Řízení celkové chyby (diskretizace a zaokrouhlování)

- Zanedbáním všech ostatních druhů chyb a **uvažováním pouze diskretizační a zaokrouhlovací chyby dostaneme optimální velikost prostorového kroku** (lze využít také pro časový krok u nestacionárních úloh).
- Výsledkem je **celková chyba** numerického řešení.

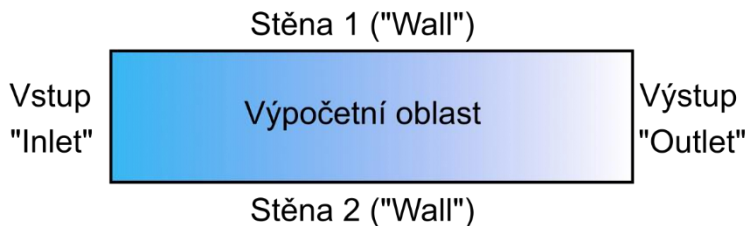


Okrajové podmínky v CFD

- Vhodné a správně zadané OP jsou pro získání přesných výsledků stěžejní!

Obecné typy OP:

- Dirichletova OP (hodnota)
- Neumannova OP (gradient)
- Kombinované a speciální OP



Specifické typy OP:

- Pevná stěna („Wall“)
- Vstup/Výstup nebo Přítok/Odtok („Inlet/Outlet“ nebo „Inflow/Outflow“)
- Vnitřní OP („Internal“ nebo „Interior“)
- Další OP (smíšené apod.)

Okrajová podmínka pevná stěna

- Jedna z nejpoužívanějších OP v CFD.
- **Tekutina nemůže procházet pevnou stěnou**, normálová složka rychlosti je tedy vzhledem ke stěně rovna nule.
- Pokud je použita podmínka **ulpívání tekutiny na stěně** („no-slip“), je navíc tečná složka rychlosti rovna nule.
- Pokud je řešena **rovnice energetická**, musí být specifikována buď **teplota** stěny nebo **tepelný tok** stěnou (nikdy obojí!).
- Pro energetickou rovnici existují i komplikovanější typy OP : **konvektivní, radiační, kombinované**.

Okrajová podmínka pevná stěna (2)

- **Lze modelovat i vedení tepla pevnou stěnou** o daném materiálu a dané tloušťce bez nutnosti tvorby sítě stěny (pouze 1D vedení, tj. tepelný tok je kolmý na stěnu).
- Dále můžeme specifikovat konkrétní hodnotu tečného napětí na stěně, např. pro nulové napětí lze specifikovat podmínku nevazké tekutiny, kdy tekutina neulpívá na stěně (“Inviscid”).
- Tímto můžeme simulovat například volnou hladinu v bazénu apod.
- Pro turbulentní proudy **lze specifikovat hodnotu drsnosti na stěně** (stěnové funkce), ale často se používá podmínka hydraulicky hladké stěny.

Vstupní a výstupní okrajové podmínky

- Hranice skrz které tekutina vstupuje („Inlet“, „Inflow“) do výpočetní oblasti nebo z ní vystupuje („Outlet“, „Outflow“).

Dělení vstupních a výstupních OP:

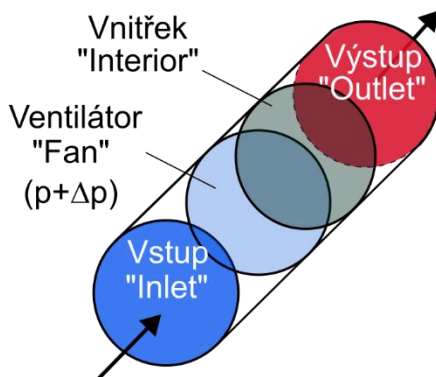
- Rychlostní OP („Velocity Inlet“, „Mass Flow Inlet“, ...)
 - Tlakové OP (Pressure Inlet, Pressure Outlet, Pressure Farfield, ...)
 - Specifické OP („Outflow“, ...)
-
- Pokud je řešena rovnice energetická nebo další rovnice pro skalární veličiny (např. turbulence), musí být zadány OP také pro tyto veličiny.

Vnitřní okrajové podmínky

- Některé kódy je označují jako podmínky týkající se „vnitřní“ výpočetní oblasti („Cell Zone Conditions“).
- Jsou specifikovány **UVNITŘ** výpočetní oblasti, **NEDEFINUJÍ hranice** oblasti.

Dělení vnitřních OP:

- ❑ Klasické vnitřní OP („Interior“ – proudění skrz výpočetní oblast)
- ❑ Specifické vnitřní OP („Porous Zone“, „Fan“ – lze definovat např. tlakovou ztrátu)



Speciální okrajové podmínky

- Nejsou to stěny ani vstupy nebo výstupy.
- Vynucují si symetrické nebo periodické podmínky na hranicích modelu.

Dělení speciálních okrajových podmínek:

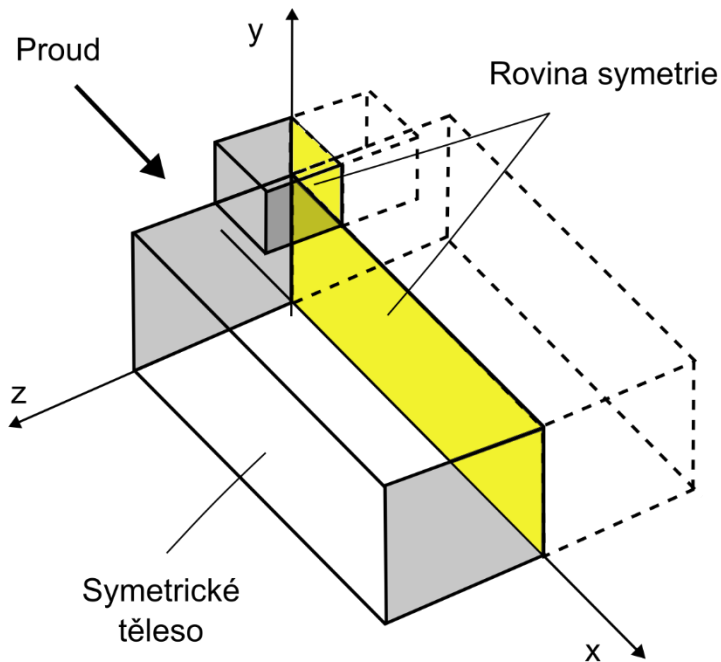
- Periodické OP (translační a rotační)
- Symetrické OP (rovinná nebo osová symetrie)

Symetrické okrajové podmínky

- Používají se „zrcadlení“ proudění – značná úspora výpočetních objemů.
- Lze použít libovolný počet podmínek symetrie.
- Použití např. pro proudění v rovné trubce nebo obtékání symetrického tělesa.
- **Geometrie i proudění musí být symetrické!**
- **Pozor na nesymetrie** v proudění, např. odtržení v difuzoru nebo odtržení na tělese.
- **Proud nemůže procházet symetrickou OP** (na rozdíl od periodické OP, viz dále).

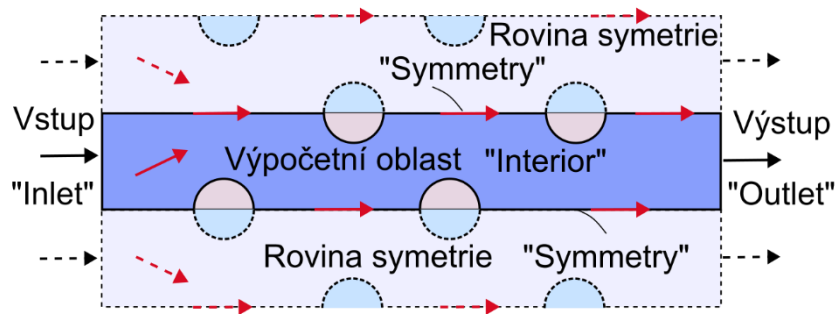
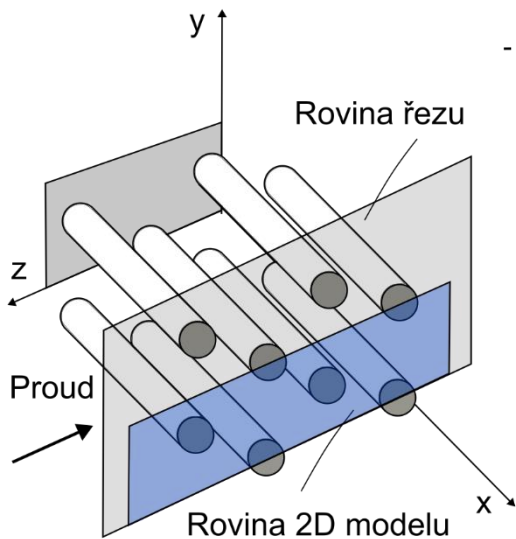
Symetrické okrajové podmínky (2)

Rovinná symetrie (3D)



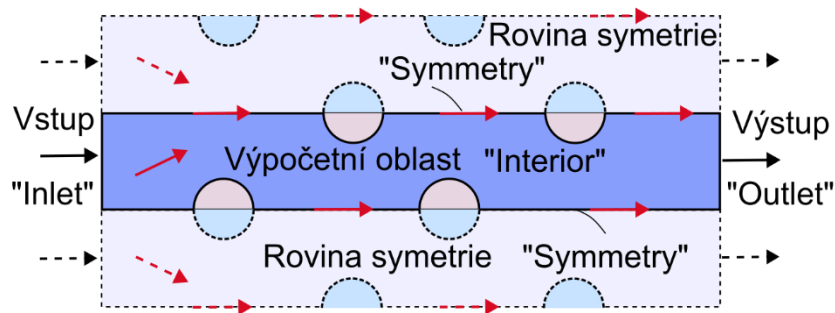
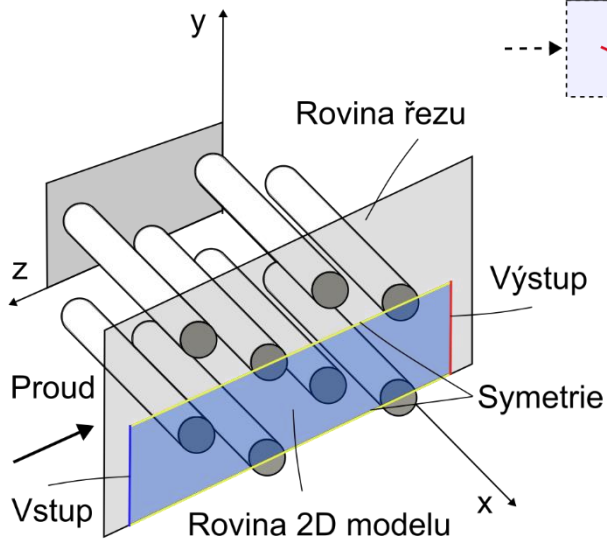
Symetrické okrajové podmínky (3)

Rovinná symetrie (2D)



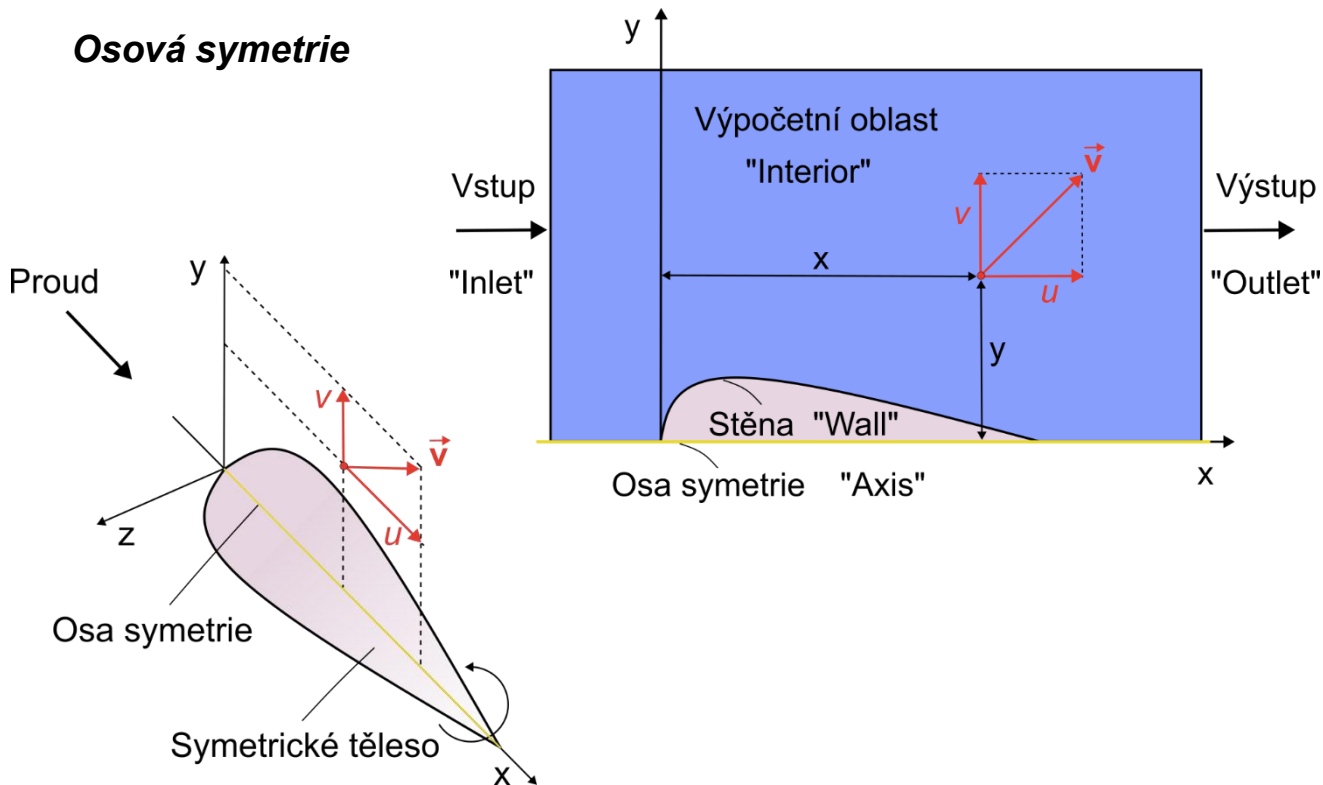
Symetrické okrajové podmínky (4)

Rovinná symetrie (2D)



Symetrické okrajové podmínky (5)

Osová symetrie

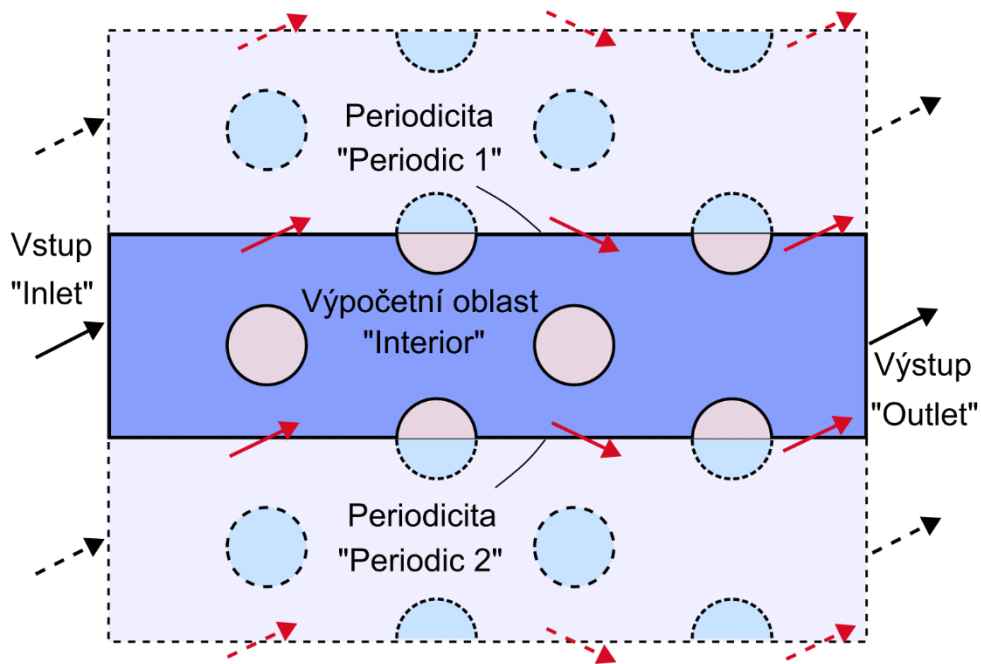


Periodické okrajové podmínky

- Používají se k **zachycení opakujících se jevů** – značná úspora výpočetních objemů.
- **Vždy** se vyskytují **v páru**: „Periodic 1“ – „Periodic 2“.
- Použití např. pro proudění mezi lopatkami nebo mezi trubkami výměníku.
- **Proud může procházet periodickou OP** (na rozdíl od symetrické OP).
- V případě, že si nejste jisti správností použití dané OP, vždy proveďte výpočet na kompletní 3D geometrii.

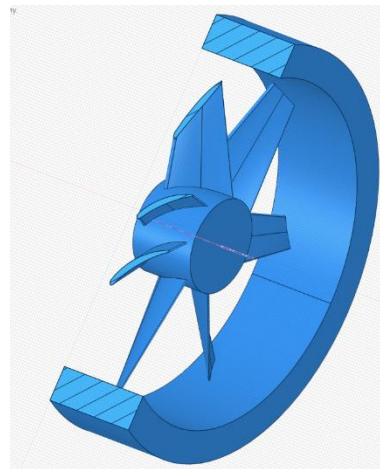
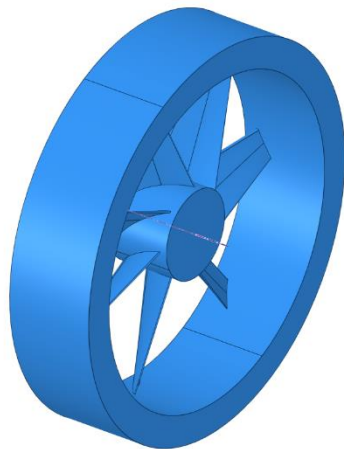
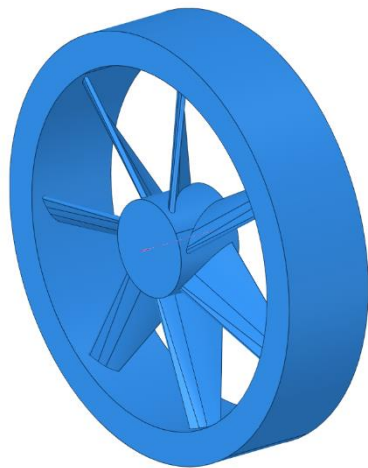
Periodické okrajové podmínky (2)

Rovinná periodicitá



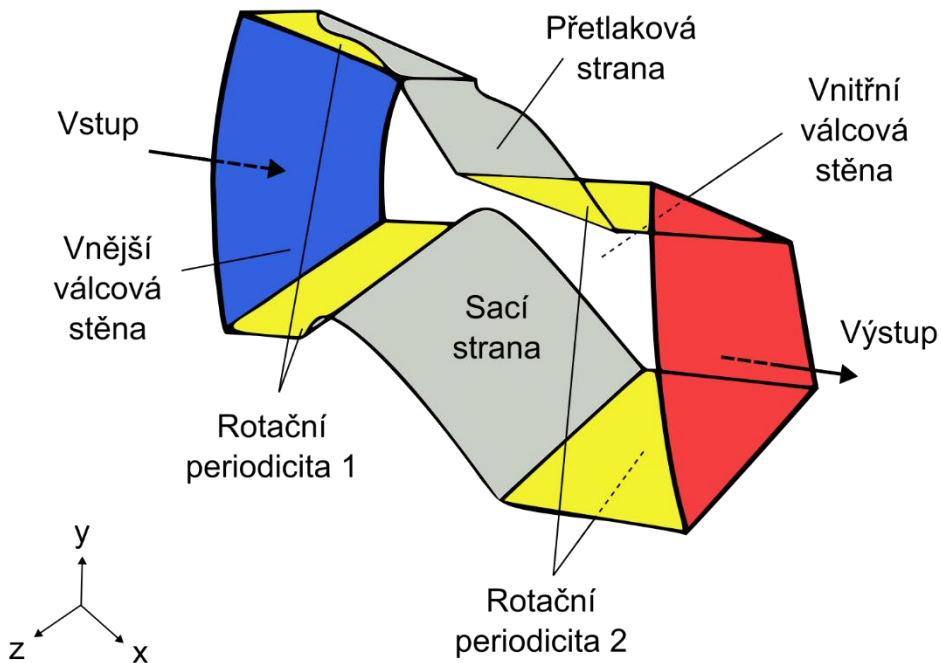
Periodické okrajové podmínky (3)

Rotační periodicitata



Periodické okrajové podmínky (4)

Rotační periodicitá



Shrnutí přednášky

- Kvalita sítě při CFD výpočtu je velmi důležitá (struktura, jemnost, ...)
- Druhy chyb při numerické simulaci (diskretizace vs. zaokrouhlování)
- Test nezávislosti sítě na řešení (diskretizační chyba)
- Typy nejčastěji používaných okrajových podmínek v CFD



Děkuji za pozornost!