



Matematický popis proudění a přestupu tepla ve výpočetní dynamice tekutin (CFD)

Obsah přednášky

- Základní dělení proudění
- Eulerův a Lagrangeův popis
- Zákony zachování hmoty, hybnosti a energie
- Zachování obecné veličiny

Úvodní pojmy

- Navier-Stokesovy (N-S) rovnice pro popis proudění.
- Tekutiny jsou látky, které se trvale nedeformují pod zatížením na rozdíl od tuhých látek.
- Tekutiny jsou uvedeny do pohybu, pokud na ně působí vnější síly.
- Tuhé látky zaujímají definovaný tvar, tekutiny nikoliv.
- V inženýrské praxi se zaměřujeme na makrospické chování tekutin.
- Předpoklad kontinua.

Použité značení:

1. Skalární veličina - a nebo (a)
2. Vektorová veličina - \mathbf{a} nebo $[\mathbf{a}]$
3. Tenzor 2. řádu - $\{\mathbf{A}\}$ nebo $\{\boldsymbol{\alpha}\}$

Dělení proudění

- Dělení dle dimenze problému:
 - ❑ **Jednodimenzionální** proudění (1D)
 - ❑ **Vícemimenzionální** proudění (2D, 3D)

- Dělení dle závislosti na čase:
 - ❑ **Stacionární** proudění
 - ❑ **Nestacionární** proudění

- Dělení dle počtu fází:
 - ❑ **Jednofázové** proudění
 - ❑ **Vícefázové** proudění

Dělení proudění (2)

- Dělení dle uvažování viskozity:
 - Ideální** (nevazké) proudění
 - Reálné** (vazké) proudění

- Dělení dle chování viskozity:
 - Proudění **Newtonovských** tekutin
 - Proudění **nenewtonovských** tekutin

- Dělení dle stupně turbulence:
 - Laminární** proudění
 - Přechodové** proudění
 - Turbulentní** proudění

Dělení proudění (3)

- Dělení dle stlačitelnosti:
 - Proudění **nestlačitelných** tekutin ($Ma \leq 0,3$)
 - Proudění **stlačitelných** tekutin ($Ma > 0,3$)

- Dělení dle rotace částic tekutin:
 - **Nerotační** (potenciální) proudění ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$)
 - **Rotační** proudění ($\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$)

Dělení proudění (4)

- Klasifikace proudění z hlediska parciálních diferenciálních rovnic, které jej popisují:

- Proudění popsané **eliptickým** typem rovnic $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f\right)$

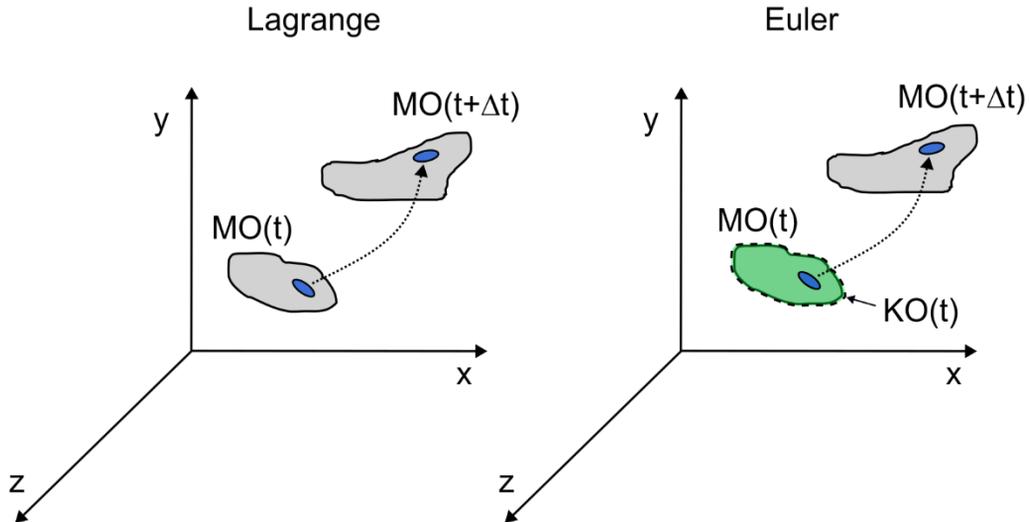
- Proudění popsané **parabolickým** typem rovnic $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)$

- Proudění popsané **hyperbolickým** typem rovnic $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)$

- Každý z uvedených typů rovnic vyžaduje speciální přístup při řešení.
- N-S rovnice jsou nelineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu s obecně 4 nezávislými proměnnými (x, y, z, t).

Eulerův a Lagrangeův popis

- Zákon zachování pro popis proudění a přenosu tepla mohou být formulovány 2 odlišnými přístupy.
- **Lagrange** = Materiálový objem (MV), **Euler** = Kontrolní objem (CV).



Eulerův a Lagrangeův popis (2)

- Proměnné jsou funkcí polohy (\mathbf{x}) a času (t), rychlost proudění je pak $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.
- 2 uvedené přístupy jsou vzájemně provázány následovně:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(x, y, z) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

- V závislosti na zvoleném přístupu jsou proměnné sledovány v kontrolním objemu či protékané oblasti (Euler), nebo sledováním materiálového objemu (Lagrangian).
- **Pro CFD se zásadně využívá Eulerova přístupu** — metoda konečných objemů (MKO).
- Pro strukturální analýzu je hojně využíván Lagrangeův přístup — metoda konečných prvků (MKP).

Eulerův a Lagrangeův popis (3)

- Pro obecnou proměnnou $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ platí:

$$\begin{aligned} \frac{D\varphi}{Dt} &= \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{MV} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt}}_u + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt}}_v + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_w = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v \frac{\partial\varphi}{\partial y} + w \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \end{aligned} \quad (3)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{\text{Lokální změna veličiny v čase}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla\varphi}_{\text{Konvektivní změna veličiny}}$$

- $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ představuje obecně jakoukoliv proměnnou, skalár nebo vektor, např. rychlost, tlak, teplota, ...

Zákon zachování hmoty

- Rovnice kontinuity popisuje **zachování hmoty**.

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{MV} = 0$$

$$\left(\frac{d(\rho V)}{dt}\right)_{MV} = 0$$

Zachování hmoty

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = 0 \quad (4)$$

- V případě absence výrazných změn tlaku nebo teploty můžeme předpokládat nestlačitelnou tekutinu:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

Zákon zachování hybnosti

- Zachování **lineární hybnosti**, tj. $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

$$\left(\frac{d[m\mathbf{v}]}{dt} \right)_{MV} = \left(\int_{\check{V}} \mathbf{f} dV \right)_{MV} = \int_{\check{V}} \mathbf{f} dV$$

$$\left(\int_{\check{V}} \frac{d[\rho\mathbf{v}]}{dt} dV \right)_{MV} = \int_{\check{V}} \mathbf{f} dV$$

$$\underbrace{\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\}}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{Vnější síly}} \quad (6)$$

Zákon zachování hybnosti (2)

- Vnější síly jsou děleny na **plošné** (\mathbf{f}_s) a **objemové** (\mathbf{f}_b).

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b \quad (7)$$

- V tomto tvaru je jednotkou každého členu v rovnici N/m^3 .
- \mathbf{f}_b obvykle zahrnuje pouze gravitační sílu.

$$\mathbf{f}_b = [\rho\mathbf{g}] \quad (8)$$

- Ve speciálních případech můžou být zahrnuty i další objemové síly.
- \mathbf{f}_s zahrnuje síly působící na kontrolní objem vlivem tlaku a tečného napětí (vazkost).

$$\mathbf{f}_s dV = \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{dS} = \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{ndS} \quad (9)$$

Zákon zachování hybnosti (3)

- Aplikací Gaussovy-Ostrogradského věty získáme

$$\int_V \mathbf{f}_s dV = \int_S \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \quad (10)$$

- \mathbf{f}_s může být vyjádřeno následovně:

$$\mathbf{f}_s = \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (11)$$

- Po úpravách a dosazení máme následující tvar N-S rovnice:

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b = \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} + [\rho\mathbf{g}] \quad (12)$$

- Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je vyjádřen jako:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = -p\{\mathbf{I}\} + \{\boldsymbol{\tau}\} \quad (13)$$

Zákon zachování hybnosti (4)

- Zákon **zachování hybnosti** může být vyjádřen následovně:

Zachování hybnosti

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} + [\rho\mathbf{g}] \quad (14)$$

Nestacionární člen
Konvektivní člen
Tlakové síly
Vazké síly
Gravitační síly

- V případě newtonovským tekutin může být tenzor tečných napětí vyjádřen takto:

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \mu(\{\nabla\mathbf{v}\} + \{\nabla\mathbf{v}\}^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\{\mathbf{I}\} \quad (15)$$

- Konečný tvar zákona zachování hybnosti pro newtonovskou tekutinu:

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \left\{ \mu(\{\nabla\mathbf{v}\} + \{\nabla\mathbf{v}\}^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\{\mathbf{I}\} \right\} + [\rho\mathbf{g}] \quad (16)$$

Zákon zachování energie

- Zachování energie vychází z 1. zákona termodynamiky vyjádřeného ve formě celkové energie $E_{total} = m(e_{internal} + 0.5 |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}|)$:

1. Zákon termodynamiky

$$\underbrace{\left(\frac{dE_{total}}{dt}\right)_{MV}}_{\text{Rychlost změny celkové energie}} = \underbrace{\dot{Q}}_{\text{Teplo dodané do systému}} - \underbrace{\dot{W}}_{\text{Práce odvedená systémem}} \quad (17)$$

- Oba členy na pravé straně rovnice (17) jsou složeny ze 2 částí:

$$\left(\frac{dE_{total}}{dt}\right)_{MV} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_b - \dot{W}_s - \dot{W}_b \quad (18)$$

- Míra odvedené práce za čas = výkon.

$$\dot{W}_s = - \int_s [\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{dS} \quad (19)$$

$$\dot{W}_b = - \int_V (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{v}) dV = - \int_V ([\rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v}) dV \quad (20)$$

Zákon zachování energie (2)

- Výkon plošných sil je vyjádřen jako:

$$\dot{W}_s = - \int_s [\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{S} = - \int_s [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}] dV = \quad (21)$$

$$= - \int_V \nabla \cdot \{ -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \} \cdot \mathbf{v} dV = - \int_V (-\nabla \cdot [p\mathbf{v}] + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dV$$

- Tepelný zdroj v kontrolním objemu:

$$\dot{Q}_b = \dot{Q}_V = \int_V \dot{q}_V dV \quad (22)$$

- Prostup tepla plochou kontrolního objemu je vyjádřen:

$$\dot{Q}_s = - \int_s [\dot{\mathbf{q}}_s] \cdot [d\mathbf{S}] = - \int_s [\dot{\mathbf{q}}_s] \cdot [\mathbf{n}] dS = - \int_V \nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s] dV \quad (23)$$

Zákon zachování energie (3)

- Zákon **zachování energie** je po dosazení a úpravách vyjádřen jako:

$$\left(\frac{dE_{\text{total}}}{dt}\right)_{MV} = \int_V \left(\frac{\partial(\rho e_{\text{total}})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho e_{\text{total}} \mathbf{v}]\right) dV = \quad (24)$$

$$= - \int_V \nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s] dV + \int_V \dot{q}_V dV + \int_V (-\nabla \cdot [p\mathbf{v}] + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dV + \int_V ([\rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v}) dV$$

Zachování energie

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho e_{\text{total}})}{\partial t}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho e_{\text{total}} \mathbf{v}]} = -\underbrace{\nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s]} + \underbrace{\dot{q}_V} - \underbrace{\nabla \cdot [p\mathbf{v}]} + \underbrace{\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]} + \underbrace{([\rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v})} \quad (25)$$

Nestacionární člen

Konvektivní člen

Tepelný tok stěnami objemu

Tepelný zdroj v objemu

Výkon tlakových sil

Výkon vazkých sil

Výkon gravitačních sil

Základní zákony zachování při proudění tekutin

Zachování hmoty

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = 0 \quad (26)$$

Zachování hybnosti

$$\underbrace{\frac{\partial [\rho \mathbf{v}]}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v} \mathbf{v}\}}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Tlakové síly}} + \underbrace{\nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\}}_{\text{Vazké síly}} + \underbrace{[\rho \mathbf{g}]}_{\text{Gravitační síly}} \quad (27)$$

Zachování energie

$$\underbrace{\frac{\partial (\rho e_{\text{total}})}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho e_{\text{total}} \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s]}_{\text{Tepelný tok stěnami objemu}} + \underbrace{\dot{q}_V}_{\text{Tepelný zdroj v objemu}} - \underbrace{\nabla \cdot [p \mathbf{v}]}_{\text{Výkon tlakových sil}} + \underbrace{\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]}_{\text{Výkon vazkých sil}} + \underbrace{([\rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v})}_{\text{Výkon gravitačních sil}} \quad (28)$$

Zachování obecné veličiny

- Pro obecnou proměnnou $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ platí následující rovnice:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\varphi)}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma_\varphi \nabla \varphi)}_{\text{Difúzní člen}} + \underbrace{S_\varphi}_{\text{Zdrojový člen}} \quad (29)$$

- φ může představovat skalární nebo vektorovou veličinu.
- Tato rovnice je velice důležitá při diskretizaci jednotlivých členů v CFD.

Shrnutí přednášky

- Základní dělení proudění
- Lagrangeův a Eulerův popis
- Základní zákony zachování při proudění tekutin a přenosu tepla



Děkuji za pozornost!