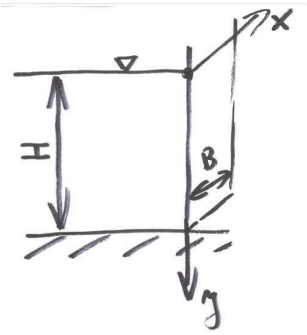
Síly na rovinné stěny

Příklad:
a) Odvoďte vztah pro výpočet tlakové síly, kterou působí voda na stavidlo - svislou rovinnou obdélníkovou stěnu o šířce 3 m, je-li hloubka vody H = 1.5 m. b) Odvoďte vztah pro výpočet působiště síly.



Dáno:

$B = 3m$

$H = 1.5m$

Určit:

$F = ?$

y_F

Řešení:

$$F = \int dF = \int_A p \cdot dA = \int_0^H \rho \cdot g \cdot h \cdot B \cdot dy = \rho \cdot g \cdot B \cdot \int_0^H h \cdot dy = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{H^2}{2} = \rho \cdot g \cdot \frac{H}{2} \cdot B \cdot H = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot B \cdot H \quad (= p_T \cdot A) =$$

$$= 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{1.5}{2} \cdot 3 \cdot 1.5 = 33.109\,kN$$

$$F \cdot y_F = \int y \cdot dF \quad \Rightarrow \quad y_F = \frac{\int y \cdot dF}{F} = \frac{\int y \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot dA}{\int \rho \cdot g \cdot h \cdot dA} = \frac{\int y \cdot h \cdot dA}{\int h \cdot dA} = \frac{\int y^2 \cdot dA}{\int y \cdot dA} = \left(\frac{I_x}{S_x} \right) = \frac{\int_0^H h^2 \cdot B \cdot dh}{\int_0^H h \cdot B \cdot dh} =$$

$$= \frac{\frac{B \cdot H^3}{3}}{\frac{B \cdot H^2}{2}} = \frac{2}{3} \cdot H = \frac{2}{3} \cdot 1.5 = 1m$$

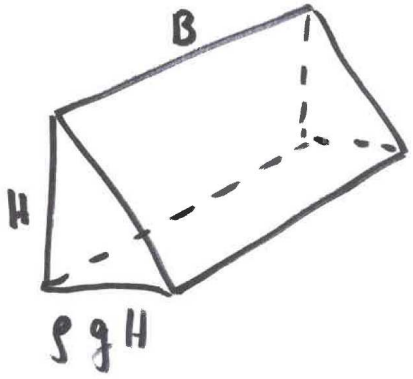
Poznámka 1: použitím vztahů pro statické momenty a momenty setrvačnosti:

- *statický moment obdélníku k ose jdoucí hladinou:* $S_x = a \cdot b \cdot y_T = B \cdot H \cdot \frac{H}{2} = \frac{B \cdot H^2}{2}$
- *moment setrvačnosti obdélníku k ose jdoucí těžištěm:* $I_{xT} = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{B \cdot H^3}{12}$
- *Steinerova věta - moment setrvačnosti k ose procházející hladinou:*

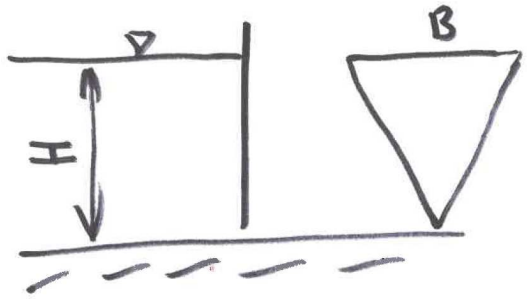
$$I_x = I_{xT} + A \cdot y_T^2 = \frac{B \cdot H^3}{12} + B \cdot H \cdot \left(\frac{H}{2} \right)^2 = \frac{B \cdot H^3 + 3 \cdot B \cdot H^3}{12} = \frac{B \cdot H^3}{3}$$

Poznámka 2: použití "geometrické představy":

- *síla = objem zatěžovacího obrazce =* $F = V_{ZO} = \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot H \cdot H \cdot B$
- *působiště = hloubka těžiště zatěžovacího obrazce =* $y_F = \frac{2}{3} H$



Příklad:
a) Jak velkou silou působí voda na přehradní hráz, nahradíme-li ji pro zjednodušení svislou rovinnou stěnou ve tvaru trojúhelníka o výšce 120 m a šířce 60 m. b) V jaké hloubce bude působiště síly.



Dáno:

$B = 60\,m$

$H = 120\,m$

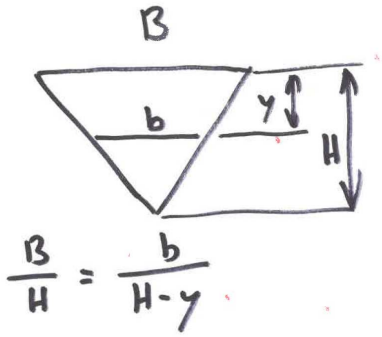
Určit:

$F = ?$

y_F

Řešení:

$$F = \int dF = \int_A p \cdot dA = \int_0^H \rho \cdot g \cdot h \cdot b(y) \cdot dy = \rho \cdot g \cdot \int_0^H h \cdot \frac{B}{H} \cdot (H - y) dy =$$



$$= \rho \cdot g \cdot \frac{B}{H} \left(\frac{H^2}{2} \cdot H - \frac{H^3}{3} \right) = \rho \cdot g \cdot B \cdot H \left(\frac{H}{2} - \frac{H}{3} \right) = \rho \cdot g \cdot B \cdot H \cdot \frac{H}{6} =$$

$$= \rho \cdot g \cdot \frac{H}{3} \cdot \frac{B \cdot H}{2} = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot \frac{B \cdot H}{2} \quad \left(= p_T \cdot A \right) =$$

$$= 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{120}{3} \cdot \frac{60 \cdot 120}{2} = 1.413\,GN$$

$$F \cdot y_F = \int y \cdot dF \quad \Rightarrow \quad y_F = \frac{\int y \cdot dF}{F} = \frac{\int y \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot dA}{\int \rho \cdot g \cdot h \cdot dA} = \frac{\int y \cdot h \cdot dA}{\int h \cdot dA} = \frac{\int y^2 \cdot dA}{\int y \cdot dA} = \left(\frac{I_x}{S_x} \right) = \frac{\int_0^H y^2 \cdot b(y) \cdot dy}{\int_0^H y \cdot b(y) \cdot dy} =$$

$$= \frac{\int_0^H y^2 \cdot \frac{B}{H} \cdot (H - y) \cdot dy}{\int_0^H y \cdot \frac{B}{H} \cdot (H - y) \cdot dy} = \frac{\frac{B}{H} \cdot \left(H \cdot \frac{H^3}{3} - \frac{H^4}{4} \right)}{\frac{B}{H} \cdot \left(H \cdot \frac{H^2}{2} - \frac{H^3}{3} \right)} = \frac{\frac{B \cdot H^3}{12}}{\frac{B \cdot H^2}{6}} = \frac{1}{2} \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60\,m$$

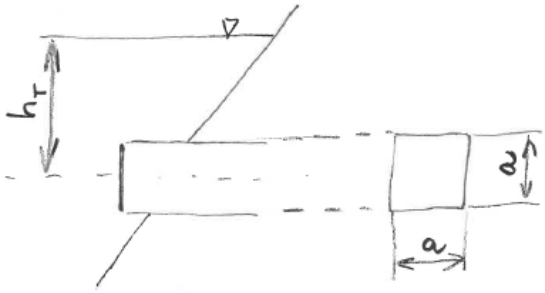
Poznámka 1: použitím vztahů pro statické momenty a momenty setrvačnosti:

- *statický moment trojúhelníku k ose jdoucí hladinou:* $S_x = \frac{a \cdot b}{2} \cdot y_T = \frac{B \cdot H}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{B \cdot H^2}{6}$
- *moment setrvačnosti trojúhelníku k ose jdoucí těžištěm:* $I_{xT} = \frac{b \cdot a^3}{36} = \frac{B \cdot H^3}{36}$
- *Steinerova věta - moment setrvačnosti k ose procházející hladinou:*

$$I_x = I_{xT} + A \cdot y_T^2 = \frac{B \cdot H^3}{36} + \frac{B \cdot H}{2} \cdot \left(\frac{H}{3} \right)^2 = \frac{B \cdot H^3 + 2 \cdot B \cdot H^3}{36} = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Příklad:

Určete velikost a působiště síly, kterou působí voda na čtvercové víko kanálu.



Dáno:	**Určit:**
$h_T = 1.6\,m$	$F = ?$
$a = 1m$	y_F

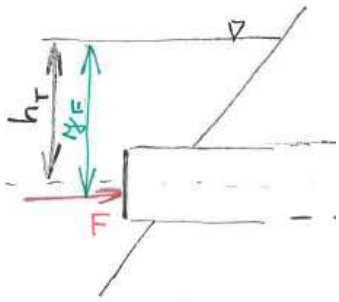
Řešení:

$$F = p_T \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot A = \rho \cdot g \cdot a^2 = 1000 \cdot 9.81 \cdot 1.6 \cdot 1^2 = 15.696\ \ kN$$

$$S_x = a \cdot b \cdot y_T = a^2 \cdot h_T$$

$$I_{xT} = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

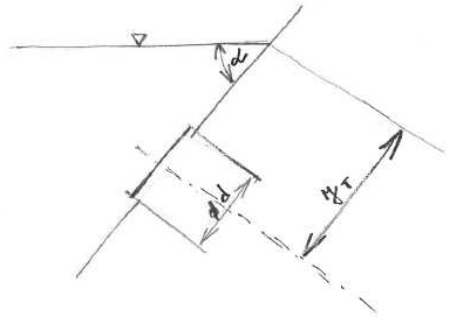
$$I_x = I_{xT} + A \cdot y_T^2 = \frac{a^4}{12} + a^2 \cdot h_T^2$$



tj.: $y_F = \frac{I_x}{S_x} == \frac{\frac{a^4}{12} + a^2 \cdot h_T^2}{a^2 \cdot h_T} = \frac{a^2}{12 \cdot h_T} + h_T = \cdot \frac{1^2}{12 \cdot 1.6} + 1.6 = 1.652\,m$

Příklad:

Určete velikost a působiště síly, kterou působí voda na kruhové víko výpusti.



Dáno:

$y_T = 1.8\,m$
$d = 1m$
$\alpha = 40°$

Určit:

$F = ?$
y_F

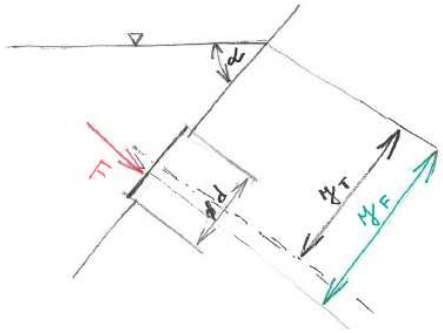
Řešení:

$$F = p_T \cdot A = \rho \cdot g \cdot y_T \cdot A = \rho \cdot g \cdot y_T \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 1000 \cdot 9.81 \cdot 1.8 \cdot \sin 40 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 8914.5 \;\; N$$

$$S_x = \pi \cdot R^2 \cdot y_T = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot y_T$$

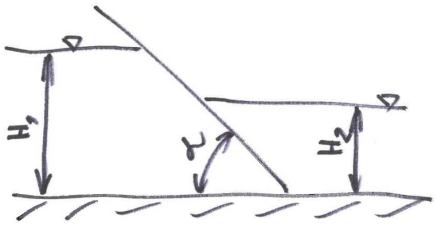
$$I_{xT} = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$I_x = I_{xT} + A \cdot y_T^2 = \frac{\pi \cdot d^4}{64} + \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot y_T^2$$



tj.: $$y_F = \frac{I_x}{S_x} = = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64} + \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot y_T^2}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot y_T} = \frac{d^2}{16 \cdot y_T} + y_T = \frac{1^2}{16 \cdot 1.8} + 1.8 = 1.8347\,m$$

Příklad:
Šikmá stěna rozděluje koryto na dvě části naplněné vodou do různých výšek: zleva do výšky 6 m, zprava do výšky 3.5 m; stěna je skloněna pod úhlem 45°. Určete velikost a působiště výsledné síly, víte-li, že šířka koryta je 5m.



Dáno:

$B = 5\,m$

$H_1 = 6\,m$

$H_2 = 3.5\,m$

$\alpha = 45°$

Určit:

$F = ?$

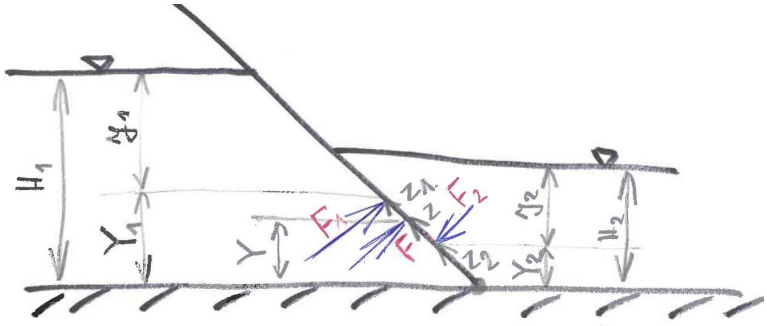
Y_F

Řešení:

$$F_1 = p_{T1} \cdot A_1 = \rho \cdot g \cdot \frac{H_1}{2} \cdot B \cdot \frac{H_1}{\sin\alpha} = 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{6}{2} \cdot 5 \cdot \frac{6}{\sin 45} = 1.2486\,MN$$

$$F_2 = p_{T2} \cdot A_2 = \rho \cdot g \cdot \frac{H_2}{2} \cdot B \cdot \frac{H_2}{\sin\alpha} = 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{3.5}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3.5}{\sin 45} = 424.9\,kN$$

$$F = F_1 - F_2 = 823.7\,kN$$



působiště síly - svisle od hladiny:

$$y_1 = \frac{2}{3} H_1 = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4\,m$$

$$y_2 = \frac{2}{3} H_2 = \frac{2}{3} \cdot 3.5 = 2.333\,m$$

působiště síly - měřeno ode dna koryta svisle vzhůru:

$$Y_1 = \frac{1}{3} H_1 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2\,m; \qquad Y_2 = \frac{1}{3} H_2 = \frac{1}{3} \cdot 3.5 = 1.167\,m$$

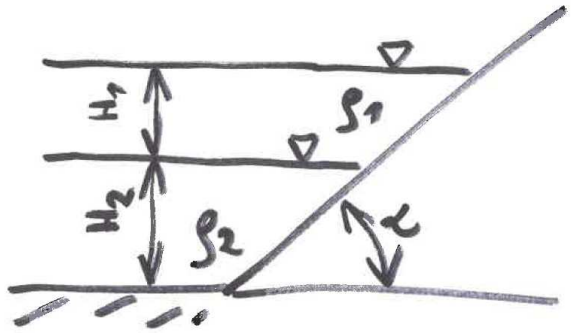
$$F \cdot Y = F_1 \cdot Y_1 - F_2 \cdot Y_2 \Rightarrow Y = \frac{F_1 \cdot Y_1 - F_2 \cdot Y_2}{F} = \frac{1.2486 \cdot 10^6 \cdot 2 - 424.9 \cdot 10^3 \cdot 1.167}{823.7 \cdot 10^3} = 2.43\,m$$

působiště síly - měřeno ode dna koryta podél stěny:

$$Z_1 = \frac{Y_1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 45} = 2.828\,m; \qquad Z_2 = \frac{Y_2}{\sin\alpha} = \frac{1.167}{\sin 45} = 1.645$$

$$F \cdot Z = F_1 \cdot Z_1 - F_2 \cdot Z_2 \Rightarrow Z = \frac{F_1 \cdot Z_1 - F_2 \cdot Z_2}{F} = \frac{1.2486 \cdot 10^6 \cdot 2.828 - 424.9 \cdot 10^3 \cdot 1.645}{823.7 \cdot 10^3} = 3.44\,m$$

Příklad:
Určete velikost a působiště výsledné tlakové síly působící na šikmou stěnu nádrže, která je naplněna dvěma různými nemísícími se kapalinami.



Dáno:

$B = 1m$
$H_1 = 1m$
$H_2 = 1.5m$
$\alpha = 60°$
$\rho_1 = 800 \frac{kg}{m^3}$
$\rho_2 = 1000 \frac{kg}{m^3}$

Určit:

$F = ?$
Y_F

Řešení:

$$F_1 = p_{T1} \cdot A_1 = \rho_1 \cdot g \cdot \frac{H_1}{2} \cdot B \cdot \frac{H_1}{\sin\alpha} = 800 \cdot 9.81 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sin 60} = 4531 N$$

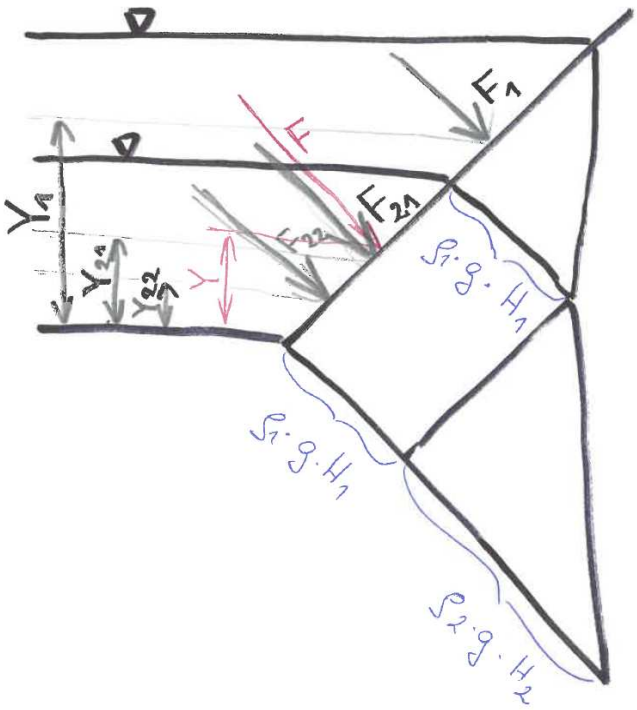
$$F_2 = F_{21} + F_{22} = \rho_1 \cdot g \cdot H_1 \cdot B \cdot \frac{H_2}{\sin\alpha} + \rho_2 \cdot g \cdot \frac{H_2}{2} \cdot B \cdot \frac{H_2}{\sin\alpha} = 800 \cdot 9.81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1.5}{\sin 60} + 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{1.5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1.5}{\sin 60} =$$
$$= 13593 + 12744 = 26337 N$$

$$F = F_1 + F_2 = 30868 N$$

Poznámka:

F_{21} - síla na spodní část stěny (na stěnu A_2) vyvolaná účinkem tekutiny 1

F_{22} - síla na spodní část stěny (na stěnu A_2) vyvolaná účinkem tekutiny 2

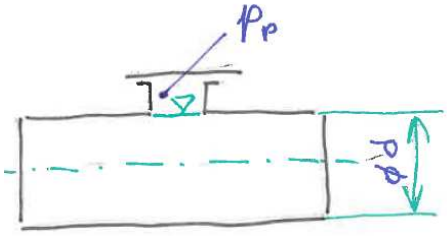


$$F \cdot Y = F_1 \cdot Y_1 + F_{21} \cdot Y_{21} + F_{22} \cdot Y_{22} \quad \Rightarrow$$

$$Y = \frac{F_1 \cdot Y_1 + F_{21} \cdot Y_{21} + F_{22} \cdot Y_{22}}{F} = \frac{F_1 \cdot \left(\frac{H_1}{3} + H_2 \right) + F_{21} \cdot \frac{H_2}{2} + F_{22} \cdot \frac{H_2}{3}}{F} =$$

$$= \frac{4531 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1.5 \right) + 13593 \cdot \frac{1.5}{2} + 12744 \cdot \frac{1.5}{3}}{30868} = 0.8058\, m$$

Příklad:
Vodorovná válcová nádrž je naplněna benzínem o hustotě *700 kg/m*^{3} . Stanovte tlakovou sílu (a její působiště) na kruhové čelo nádoby. Průměr nádoby je *2 m*, nádoba (nádrž) je zcela naplněna; nad hladinou je přetlak *0.01 MPa*.



Dáno:

$\rho = 700 \frac{kg}{m^3}$

$d = 2\,m$

$p_p = 0.01\,MPa$

Určit:

$F = ?$

y_F

Řešení

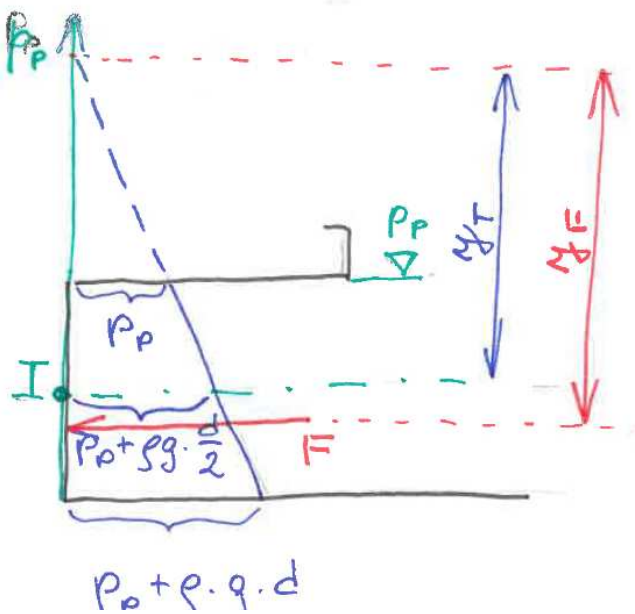
$$F = p_T \cdot A = \left(p_p + \rho \cdot g \cdot \frac{d}{2} \right) \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} =$$

$$= \left(0.01 \cdot 10^6 + 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{2}{2} \right) \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 52.989\,kN$$

$$S_x = A \cdot y_T = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot y_T = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{p_p}{\rho \cdot g} \right)$$

$$I_{xT} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$I_x = I_{xT} + A \cdot y_T^2 = \frac{\pi \cdot d^4}{64} + \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{p_p}{\rho \cdot g} \right)^2$$



tj.:

$$y_F = \frac{I_x}{S_x} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64} + \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{p_p}{\rho \cdot g} \right)^2}{\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{p_p}{\rho \cdot g} \right)} = \left(\frac{d}{2} + \frac{p_p}{\rho \cdot g} \right) + \frac{d^2}{16 \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{p_p}{\rho \cdot g} \right)} =$$

$$= \left(\frac{2}{2} + \frac{0.01 \cdot 10^6}{700 \cdot 9.81} \right) + \frac{2^2}{16 \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{0.01 \cdot 10^6}{700 \cdot 9.81} \right)} = (1 + 1.456) + 0.102 = 2.558\,m$$

Síla má působiště *2.558 metrů* pod hladinovou plochou s nulovým přetlakem, tj. *1.558 metrů* pod hladinou benzínu (nad kterou je přetlak 0.01 MPa), tj. *0.102 metry* pod těžištěm plochy (tj. pod osou nádrže).